



Contact thermique périodique : un modèle quadripolaire et une expérience

Periodic thermal contact: a quadrupole model and an experiment

Hao Wang, Alain Degiovanni*, Christian Moyne

Laboratoire d'Energétique et de Mécanique Théorique et Appliquée, LEMTA-ENSEM, UMR CNRS 7563, INP Lorraine, 2, avenue de la Forêt de Haye, B.P. 160, 54504 Vandoeuvre-Lès-Nancy cedex, France

Reçu le 11 juillet 2000; accepté le 16 mars 2001

Résumé

Dans cet article, un modèle quadripolaire est présenté pour résoudre le problème de transfert conductif dans un contact périodique monodimensionnel. La modélisation est effectuée à l'aide d'un développement en séries de Fourier des variables périodiques en temps. Cette méthode permet de prédire le comportement thermique du contact périodique dans des conditions d'interface variant de façon quelconque en temps. Dans le cas du contact intermittent, la solution du modèle fait apparaître une oscillation harmonique et un phénomène de Gibbs au point de discontinuité de la conductance à cause de l'insuffisance des séries de Fourier à décrire parfaitement des fonctions discontinues. Par contre, la méthode présente une convergence très rapide lorsque la conductance varie continûment en temps. Enfin, une expérimentation de contact intermittent (contact–non-contact) est mise en place. Les résultats expérimentaux sont comparés aux solutions théoriques. L'accord est très bon pour des périodes réduites supérieures à 1. Pour des périodes inférieures à 1, l'expérience ne correspond plus parfaitement aux hypothèses du modèle et des corrections doivent être introduites. © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Abstract

In this study, a quadrupole model for solving the conductive transfer in a one-dimensional periodic contact is presented. The modeling is achieved through Fourier series development of periodically time-varying variables. This method could be used for predicting the thermal behavior of the contact under any periodic condition. In the case of intermittent contact, the solution of the model presents an harmonic oscillation and a Gibbs' phenomenon at the discontinuities of the contact conductance due to the imperfection of Fourier series in describing discontinuous functions. On the other hand, this model presents a very fast convergence when the conductance varies continuously. Finally, an experiment of intermittent contact (contact–separation) is performed and the results are compared with the theoretical solutions. A good agreement is found when the dimensionless periods are greater than 1. For the periods less than 1, the experiment does not correspond perfectly to the assumptions of the model, and the corrections should be introduced. © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

Mots-clés : Modélisation ; Conduction ; Résistance thermique de contact ; Contact périodique ; Quadripôle thermique ; Séries de Fourier

Keywords: Modeling; Conduction; Thermal contact resistance; Periodic contact; Thermal quadrupole; Fourier series

1. Introduction

Le problème général du transfert thermique au travers d'un contact solide-solide a été très étudié depuis de nombreuses années que ce soit sur le plan théorique ou expérimental [1–4]. Les auteurs se sont d'abord intéressés au régime permanent thermique et mécanique, puis aux régimes

thermiques transitoires pour un contact mécaniquement établi, puis aux contacts glissants (le déplacement du solide est perpendiculaire au flux) et aux contacts intermittents (le déplacement du solide est dans la direction du flux). C'est ce dernier cas qui nous intéresse ici et c'est aussi celui qui a été le moins étudié.

Howard et Sutton [5,6] sont parmi les premiers à avoir abordé ce problème. Ils ont étudié un cas de régime périodique monodimensionnel en régime établi à l'aide de calculateurs analogiques. Reed et Mullineux [7] ont ensuite proposé une étude semi-numérique du même problème.

* Correspondance et tirés à part.

Adresse e-mail : directeur@eeigm.inpl-nancy.fr (A. Degiovanni).

Nomenclature

A, B, C, D	coefficients du quadripôle
a	diffusivité thermique $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
f	fréquence du contact périodique s^{-1}
h	conductance du contact $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$
k	conductivité thermique $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
l	longueur du barreau m
N	nombre de termes utilisés pour le calcul des séries $(2N + 1)$
q	densité de flux de chaleur $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
R_{app}	résistance apparente par unité de surface du système $\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$
R_b	résistance du barreau par unité de surface $\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$
R_c	résistance du contact par unité de surface $\text{m}^2 \cdot \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$
T	température K
T_0	température imposée de l'extrémité fixe du barreau K
T_c	température imposée à la surface du contact K

t	variable de temps	s
x	variable d'espace axiale	m
<i>Symboles grecs</i>		
τ	période	s
τ_b	temps caractéristique du barreau l^2/a	s
ω	pulsation $2\pi f$	s^{-1}
<i>Indices inférieurs</i>		
0	en $x = 0$	
1, 2	relatifs aux durées 1, 2 (contact et non contact)	
l	en $x = l$	
$l - x$	relatif au milieu entre x et l	
n	relatif au n ème terme du développement de Fourier	
<i>Indices supérieurs</i>		
—	quantité moyenne	
*	paramètre réduit	

Mikhailov [8], puis Vick et Özisik [9] ont proposé une solution analytique à l'aide de transformations intégrales. Avec une méthode identique, Degiovanni et Batsale [10] ont examiné les cas limites en fonction de la fréquence du contact. Le Tableau 1 résume les caractéristiques principales et les hypothèses faites par les différents auteurs.

Les études expérimentales concernant les contacts périodiques se résument à la mesure d'une résistance de contact moyenne dans le cas d'une expérience de type intermittent (contact-non contact) [11–14], la résistance de contact étant constante par morceaux. Les appareils expérimentaux sont constitués typiquement de deux barres monodimensionnelles, dont les extrémités sont maintenues à une température constante.

Ces travaux, soit théoriques, soit expérimentaux, ont modélisé le transfert de chaleur en régime périodique en maintenant constantes les valeurs de résistance de contact correspondant aux périodes de contact et de non-contact.

Cependant certains auteurs [11,12] ont montré que, dans les cas pratiques, la résistance de contact n'est pas constante même sous une pression de contact invariable, en particulier, dans le cas d'une petite période de contact. Un exemple typique d'application industrielle est donné par les soupapes de moteur à explosion dont on trouve un travail à la fois expérimental et théorique dans [15].

Dans cette étude, nous proposons une résolution du transfert de chaleur monodimensionnel en régime périodique établi, par une méthode quadripolaire en décomposant les variables périodiques en série de Fourier. Ce modèle nous permet de traiter le problème du contact pour des conditions d'interface variant de façon quelconque en temps. Deux exemples sont donnés, soit le cas de conductance de contact sinusoïdale, soit le cas de contact intermittent. Les résultats sont comparés avec ceux de la littérature pour ce dernier cas.

Tableau 1
Travaux sur les contacts en régime périodique

Table 1
Works on periodic contacts

Référence	Configuration	Méthode
Howard et Sutton [5]	un milieu de longueur suffisante ; contact et non contact parfaits ; l'extrémité à température imposée	calculateur analogique
Howard et Sutton [6]	un milieu de longueur suffisante ; contact imparfait ; l'extrémité à température imposée	calculateur analogique
Reed et Mullineux [7]	un milieu ; contact imparfait, non contact parfait ; l'extrémité à température imposée	semi-numérique
Mikhailov [8]	un milieu ; contact imparfait, non contact parfait ; l'extrémité à température imposée	transformation intégrale
Vick et Özisik [9]	deux milieux différents ; contact imparfait, non contact imparfait ; convection sur les extrémités ; source interne	transformation intégrale
Degiovanni et Batsale [10]	un milieu ; contact et non contact imparfaits ; l'extrémité à température imposée	transformation intégrale

Enfin, nous exposons une expérience correspondant au contact intermittent.

2. Modèle mathématique

Considérons un cylindre de longueur l avec une section uniforme, dont la surface latérale est isolée, si bien que le transfert de chaleur est unidirectionnel. Une extrémité du barreau est à température imposée T_0 et l'autre extrémité soumise à un contact périodique avec une surface à température T_c (Fig. 1). La conductance du contact $h(t)$ entre les surfaces en contact varie périodiquement en temps. En supposant les caractéristiques physiques du barreau constantes, on obtient le système suivant :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

avec les conditions aux limites :

$$T = T_0, \quad \text{en } x = 0 \quad (1a)$$

$$-k \frac{\partial T}{\partial x} = h(t)(T - T_c), \quad \text{en } x = l \quad (1b)$$

où la conductance (ou le coefficient d'échange de chaleur) du contact par unité de surface est $h(t) = \frac{1}{R_c(t)}$, et $R_c(t)$ la résistance thermique du contact.

Dans ce problème, on s'intéresse à la détermination de la répartition de température dans le barreau et à la température de l'interface de contact T_l en fonction du temps. Ici, nous n'envisagerons que la situation au bout d'un temps suffisamment long permettant de considérer le régime établi.

Ce problème est le même que celui de deux barreaux identiques en contact périodique dont les extrémités sont à une différence de température égale $2(T_c - T_0)$.

Pour étudier le système de façon plus générale, on introduit les grandeurs adimensionnelles :

$$T^* = \frac{T - T_c}{T_0 - T_c}, \quad x^* = \frac{x}{l}, \quad t^* = \frac{t}{\tau_b} \quad \text{et} \quad (2)$$

$$R_c^* = \frac{R_c}{R_b} \quad (h^* = R_b h), \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_b} \quad (3)$$

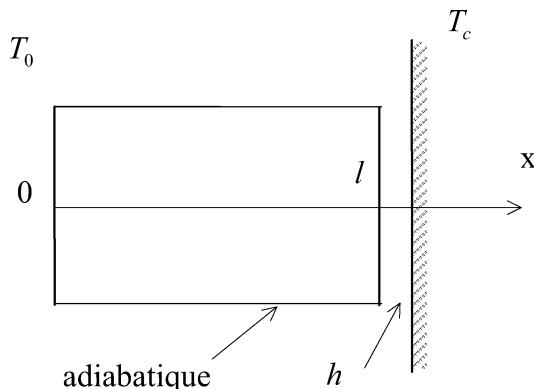


Fig. 1. Schéma du système.

Fig. 1. System schema.

où la résistance thermique du barreau est $R_b = l/k$ et son temps caractéristique est $\tau_b = l^2/a$.

3. Résolution par la méthode quadripolaire

La méthode quadripolaire consiste à utiliser, après une transformation de Laplace sur les températures et les flux, une écriture matricielle entre les grandeurs d'entrée (température et flux en $x = 0$) et les grandeurs de sortie (température et flux en $x = l$) (matrice de transfert inverse).

Cette méthode a été utilisée pour résoudre en particulier les problèmes de résistance de contact ou de multicouches en régime transitoire [16–18]. Nous allons utiliser cette approche dans le cas de régimes périodiques établis en remplaçant la transformation de Laplace par une décomposition en série de Fourier.

3.1. Modèle quadripolaire de conduction périodique

On peut décomposer la température et la densité de flux périodiques de la manière suivante :

$$T(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [T_n(x) e^{i\omega_n t}] \quad (4)$$

$$q(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} [q_n(x) e^{i\omega_n t}] \quad (5)$$

où $\omega_n = n\omega = 2\pi nf$.

A partir de l'équation (1), on a alors pour toute valeur de n :

$$\frac{\partial^2 T_n}{\partial x^2} = \frac{i\omega_n}{a} T_n \quad (6)$$

Pour cette équation, on a la solution sous forme quadripolaire :

$$\begin{bmatrix} T_{0,n} \\ q_{0,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & B_n \\ C_n & D_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{l,n} \\ q_{l,n} \end{bmatrix} \quad (7)$$

où $T_{0,n}$, $T_{l,n}$, $q_{0,n}$ et $q_{l,n}$ sont respectivement les coefficients du développement des températures et des flux par unité de surface en $x = 0$ et $x = l$, et les coefficients du quadripôle sont donnés par :

$$A_n = D_n = \cosh(\sqrt{i\omega_n/a} l) \quad (8a)$$

$$C_n = k\sqrt{i\omega_n/a} \sinh(\sqrt{i\omega_n/a} l) \quad (8b)$$

$$B_n = \frac{(A_n D_n - 1)}{C_n} = \frac{\sinh(\sqrt{i\omega_n/a} l)}{k\sqrt{i\omega_n/a}} \quad (8c)$$

pour $n = 0$, on a :

$$A_0 = D_0 = 1, \quad C_0 = 0 \quad \text{et}$$

$$B_0 = R_b = \frac{l}{k}$$

Il faut remarquer que ce quadripôle est une propriété intrinsèque du milieu, et chaque terme de la matrice de transfert est indépendant des conditions aux limites.

3.2. Résolution du problème pour le contact périodique

A l'interface, à partir de la condition (1b) en $x = l$, on a

$$q_l = h(t)(T_l - T_c) \quad (9)$$

Nous décomposons également la conductance en série de Fourier :

$$h(t) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} h_n e^{i\omega_n t} \quad (10)$$

Injectons les expressions (4), (5) et (10) dans l'équation (9) :

$$\begin{aligned} & \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} q_{l,n} e^{i\omega_n t} \\ &= \left(\sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} [h_k e^{i\omega_k t}] \right) \left(\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} [(T_{l,m} - T_{c,m}) e^{i\omega_m t}] \right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} h_k (T_{l,m} - T_{c,m}) e^{i\omega_{k+m} t} \end{aligned} \quad (11)$$

Par identification terme à terme, on voit que $q_{l,n}$ est donné par le coefficient $h_k (T_{l,m} - T_{c,m})$ pour $k + m = n$, soit $k = n - m$; par conséquent :

$$q_{l,n} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} [h_{n-m} (T_{l,m} - T_{c,m})] \quad (12)$$

Le quadripôle (7) du milieu nous donne la relation :

$$T_{0,n} = A_n T_{l,n} + B_n q_{l,n} \quad (13)$$

En introduisant la relation (12) dans (13), l'équation sur la seule inconnue $T_{l,n}$ est donnée par :

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} [h_{n-m} (T_{l,m} - T_{c,m})] + \frac{A_n}{B_n} T_{l,n} = \frac{T_{0,n}}{B_n} \quad (14)$$

Pour mettre en œuvre les calculs, nous tronquons les séries de Fourier, c'est-à-dire que seul les termes $-N \leq n \leq N$ de la température sont utilisés.

On définit les vecteurs suivants :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_l &= [T_{l,n}], & \mathbf{T}_c &= [T_{c,n}], & \mathbf{T}_0 &= [T_{0,n}] \\ \mathbf{q}_0 &= [q_{0,n}], & \mathbf{q}_l &= [q_{l,n}] \\ \mathbf{H} &= [h_{n+N}] \end{aligned} \quad (15)$$

Le quadripôle (7) peut alors s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}_0 \\ \mathbf{q}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{diag}[A_n] & \mathbf{diag}[B_n] \\ \mathbf{diag}[C_n] & \mathbf{diag}[D_n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_l \\ \mathbf{q}_l \end{bmatrix}$$

la relation (12) :

$$\mathbf{q}_l = \mathbf{toeplitz}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') \mathbf{T}_l - \mathbf{toeplitz}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') \mathbf{T}_c$$

la relation (13) :

$$\mathbf{T}_0 = \mathbf{diag}[A_n] \mathbf{T}_l + \mathbf{diag}[B_n] \mathbf{q}_l$$

et par suite la relation (14) :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_0 &= \mathbf{diag}[A_n] \mathbf{T}_l + \mathbf{diag}[B_n] (\mathbf{toeplitz}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') \mathbf{T}_l \\ &\quad - \mathbf{toeplitz}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') \mathbf{T}_c) \end{aligned}$$

soit sous une forme condensée :

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{toeplitz}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') + \mathbf{diag}\left[\frac{A_n}{B_n}\right] \right) \mathbf{T}_l \\ &= \left[\frac{T_{0,n}}{B_n} \right] + \mathbf{toeplitz}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') \mathbf{T}_c \end{aligned} \quad (16)$$

où $\mathbf{diag}\left[\frac{A_n}{B_n}\right]$ est une matrice diagonale et $\mathbf{toeplitz}(\mathbf{H}, \mathbf{H}')$ est une matrice de Toeplitz asymétrique dont la première colonne est \mathbf{H} et la première ligne \mathbf{H}' , telle que :

$$\mathbf{toeplitz}(\mathbf{H}, \mathbf{H}') = \begin{bmatrix} h_0 & h_{-1} & \dots & h_{-2N} \\ h_1 & h_0 & \dots & h_{-2N+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{2N} & h_{2N-1} & \dots & h_0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

en remarquant, comme $h(t)$ est réel, que h_{-n} est égal au conjugué de h_n .

Remarques.

- On peut obtenir aisément le flux à l'interface $x = l$:

$$\mathbf{q}_l = \left[\frac{1}{B_n} T_{0,n} \right] - \left[\frac{A_n}{B_n} T_{1,n} \right] \quad (18)$$

avec $\mathbf{q}_l = [q_{l,n}]$.

- A partir des expressions (7) et (8), on a très facilement la température d'un point quelconque d'abscisse x du milieu :

$$\mathbf{T}_x = \left[\left(A_{l-x,n} - \frac{B_{l-x,n}}{B_n} \right) T_{1,n} \right] + \left[\frac{B_{l-x,n}}{B_n} T_{0,n} \right] \quad (19)$$

avec $\mathbf{T}_x = [T_{x,n}]$.

- On peut résoudre ce problème suivant la même démarche en décomposant la résistance de contact $R(t) = 1/h(t)$ en série de Fourier. Ainsi, l'équation (16) s'écrit :

$$\left(\mathbf{toeplitz}(\mathbf{R}, \mathbf{R}') + \mathbf{diag}\left[\frac{B_n}{A_n}\right] \mathbf{q}_l \right) = \left[\frac{T_{0,n}}{A_n} \right] - \mathbf{T}_c \quad (20)$$

- On peut également envisager des conditions limites plus complexes du type mixte en $x^* = 0$:

$$-K \frac{\partial T}{\partial x} = q_f + h_f (T_f - T), \quad \text{en } x = 0 \quad (21)$$

où h_f est un coefficient d'échange global (si $h_f \rightarrow 0$, on retrouve la condition flux imposé; si $h_f \rightarrow \infty$, on retrouve la condition température imposée).

Ainsi le problème est résolu de la même façon en utilisant la relation suivante à la place de (13) :

$$q_f + h_f T_f = (h_f A_n + C_n) T_{l,n} + (D_n + h_f B_n) q_{l,n} \quad (22)$$

Les solveurs matriciels de type MATLAB [19] permettent une mise en œuvre très simple de ce genre d'expressions.

4. Résultats et discussion

Nous présentons ici uniquement les résultats, dont quelques-uns sont comparés avec ceux de la littérature, obtenus dans le cas le plus facile et le plus difficile, soit une conductance sinusoïdale et un contact intermittent (résistance de contact constante par morceau). Les développements de Fourier des conductances de contact périodiques sont donnés en Annexe A (le modèle quadripolaire est valable quelle que soit la fonction périodique $h(t)$).

Nous portons notre attention en particulier sur la résistance apparente du système en fonction de la période du contact. En régime périodique établi, la résistance apparente du système R_{app} est définie comme :

$$R_{app} = \frac{T_0 - T_c}{\bar{q}} \quad (23)$$

et la résistance apparente réduite :

$$R_{app}^* = \frac{R_{app}}{R_b} = \frac{R_{app}}{l/k} \quad (24)$$

Tous nos résultats sont donnés en paramètres réduits. Nous donnerons le nombre de termes N utilisés pour le calcul.

4.1. Cas de $h^*(t^*) = u + v \cos(\omega^* t^*)$

La Fig. 2 montre les évolutions de la température réduite T_l^* sur une période pour trois périodes (petite, modérée et grande). Cette méthode se caractérise par une convergence très rapide, celle-ci étant d'autant meilleure que la période est petite.

L'ensemble des courbes R_{app}^* en fonction de la période τ^* est représenté sur la Fig. 3 pour différentes amplitudes de la conductance v lorsque la même valeur de u est utilisée. Il faut constater l'excellent accord dans le cas limite de la

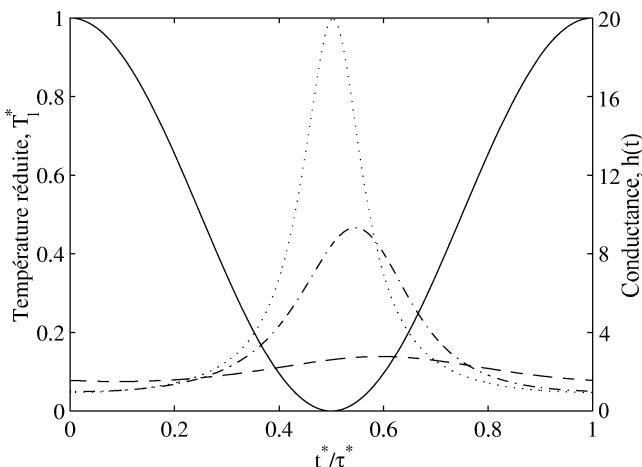


Fig. 2. Évolutions de température à l'interface dans une période. Conductance : — $h(t)$ ($u = v = 10$) ; température : $\tau^* = 10^2$ ($N = 20$) ; - - - - $\tau^* = 10^0$ ($N = 10$) ; - - - $\tau^* = 10^{-2}$ ($N = 4$).

Fig. 2. Interface temperature evolutions during one period.

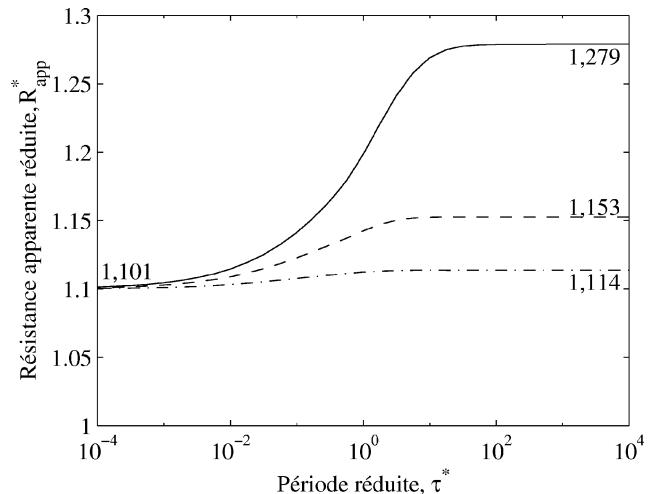


Fig. 3. Résistance apparente du système en fonction de la période : ($u = 10$, $N = 20$) ; — $v = u$; - - - $v = 0.8u$; - - - $v = 0.5u$.

Fig. 3. Apparent system resistance versus the period.

Tableau 2
Distributions de température aux temps $\tau^*/2$ et τ^*

Table 2
Temperature distributions at the times $\tau^*/2$ and τ^*

x^*	modèle quadripolaire ($N = 60$)		transformation intégrale [7,8]	
	$T^*(\tau^*/2)$	$T^*(\tau^*)$	$T^*(\tau^*/2)$	$T^*(\tau^*)$
	$(h_1^* = 20, h_2^* = 0, \tau_1^* = \tau_2^* = 0,078125)$			
0,0	1,00000	1,00000	1,00000	1,00000
0,2	0,83984	0,83376	0,83987	0,83378
0,4	0,67397	0,67310	0,67401	0,67313
0,6	0,49280	0,53113	0,49286	0,53118
0,8	0,28712	0,43011	0,28716	0,43018
1,0	0,06763	0,34146	0,05875	0,39317

très petite période où la résistance du système ne dépend que de la valeur moyenne de la conductance h^* . Cela veut dire que pour des périodes de plus en plus petites, le champ thermique n'a pas le temps d'évoluer. En revanche, pour le cas limite de la très grande période, nous observons que la résistance apparente du système décroît avec la décroissance de l'amplitude v jusqu'à la résistance apparente rencontrée en régime permanent où $v = 0$.

Nous n'avons pas trouvé de solution à ce problème dans la littérature.

4.2. Cas du contact intermittent

La conductance du contact dans le cas de contact intermittent se décrit comme suit :

$$h = \begin{cases} h_1, & \text{pour la durée de contact } \tau_1 \\ h_2, & \text{pour la durée de non-contact } \tau_2 \end{cases} \quad (25)$$

Ici, nous n'envisageons que le cas où $\tau_1 = \tau_2$.

Nous examinons d'abord le même exemple que celui adopté dans les références [8,9] où $h_1^* = 20$, $h_2^* = 0$ et $\tau_1^* = \tau_2^* = 0,078125$. Le résultat est donné, en le comparant avec celui des deux références, dans le Tableau 2. Nous observons

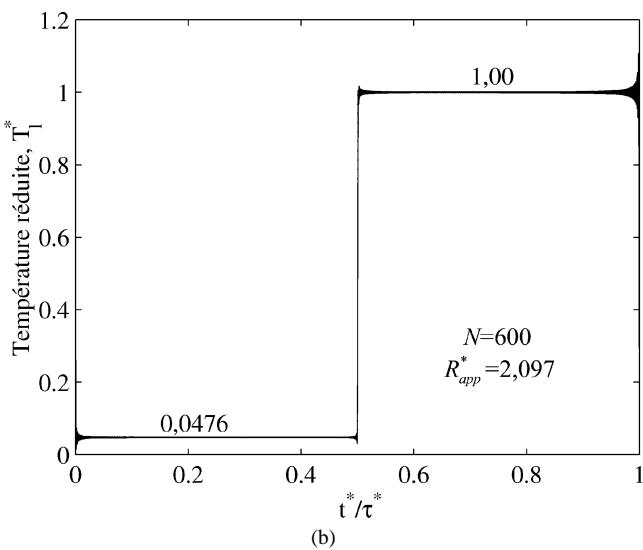
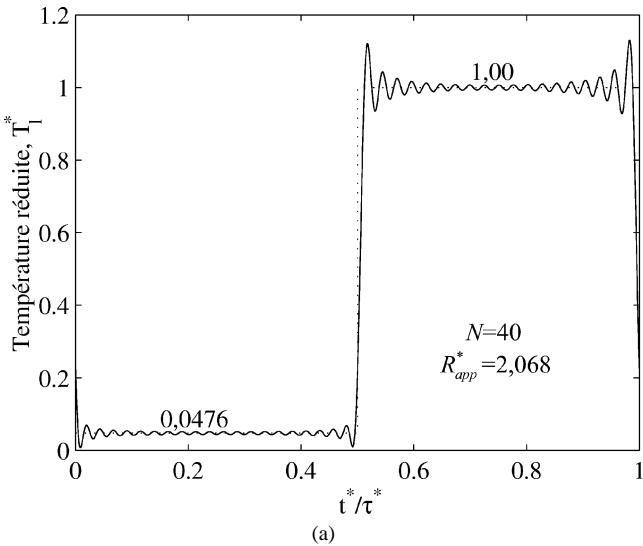


Fig. 4. Convergence de la solution par la méthode quadripolaire : (a) oscillation harmonique de la température T_l^* (pour N petit) ; (b) phénomène de Gibbs de la température T_l^* (pour N grand). ($h_1^* = 20$, $h_2^* = 0$, $\tau^* = 10^3$) ; — méthode quadripolaire ; ····· régime permanent.

Fig. 4. Convergence of the solution by the quadrupole method: (a) harmonic oscillation of the temperature T_l^* (for small N); (b) Gibbs phenomenon of the temperature T_l^* (for big N).

une mauvaise convergence proche du temps de changement de l'état de contact inhérent à la méthode. Néanmoins, on peut remarquer que l'erreur sur les paramètres instantanés résulte d'une oscillation harmonique d'ordre $N - 1$ autour d'une valeur moyenne. Au contraire, les paramètres concernant les valeurs moyennes en temps, par exemple la résistance apparente du système R_{app}^* , sont obtenus avec une très bonne précision. C'est ce que l'on peut voir dans l'exemple de la Fig. 4 pour une grande période (les deux régimes permanents sont obtenus). Ce résultat nous permet d'utiliser un petit N quand nous examinons seulement les paramètres moyens en temps.

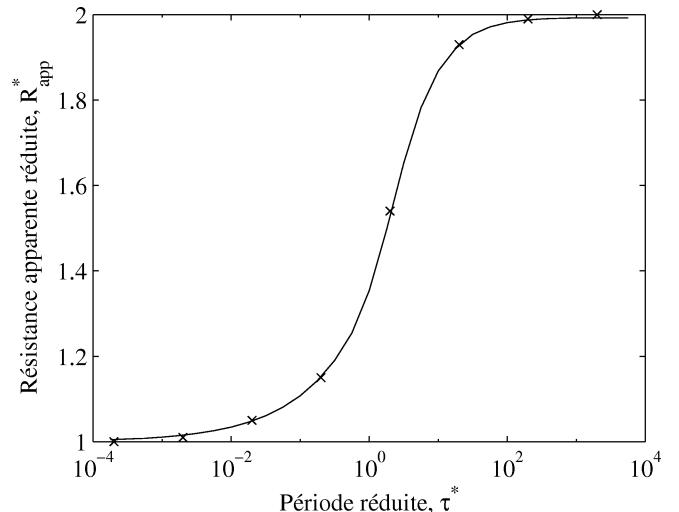


Fig. 5. Résistance apparente du système en fonction de la période. ($h_1^* = 10^4$, $h_2^* = 0$) ; — méthode quadripolaire ($N = 400$) ; \times d'après A. Degiovanni et al. [10].

Fig. 5. Apparent system resistance versus the period.

Dans les cas d'une grande période et de grandes valeurs de N , le phénomène de Gibbs est également observé dans l'évolution de la température à la surface de contact aux temps τ_1 et τ , où existent des discontinuités de 1^{re} espèce (Fig. 4(b)) ; ce qui, dans une certaine mesure, vérifie mathématiquement la fiabilité du calcul. Il n'affecte les températures qu'au voisinage des discontinuités.

La Fig. 5 montre la résistance apparente du système en fonction de la période dans un cas limite où $h_1^* \rightarrow \infty$ et $h_2^* \rightarrow 0$ en comparaison avec le résultat de Degiovanni et Batsale [10]. Ils sont en bon accord.

5. Étude expérimentale

Une expérience proche des hypothèses théoriques est mise en œuvre. Le dispositif est développé pour simuler, autant que possible, le problème de contact intermittent.

5.1. Montage expérimental

La Fig. 6 montre le dispositif expérimental. Un cylindre pneumatique pilotable permet d'établir les périodes de contact et de non-contact. Les périodes de contact et non-contact sont contrôlées par un dispositif de valves sur les lignes d'entrée et de sortie de l'air comprimé. Les températures constantes et uniformes sont obtenues sur la base de l'échantillon et la surface de contact par deux cuves à eau. Les cuves à eau sont alimentées par deux bains thermostatés. Une fine couche d'indium déposée sur l'acier améliore le contact laiton-acier (les caractéristiques du barreau sont données en Annexe B).

Le barreau est instrumenté par 5 thermocouples (0,25 mm) dont le premier sert de référence de température (T_0). Le dernier est implanté à 0,5 mm de la surface libre du

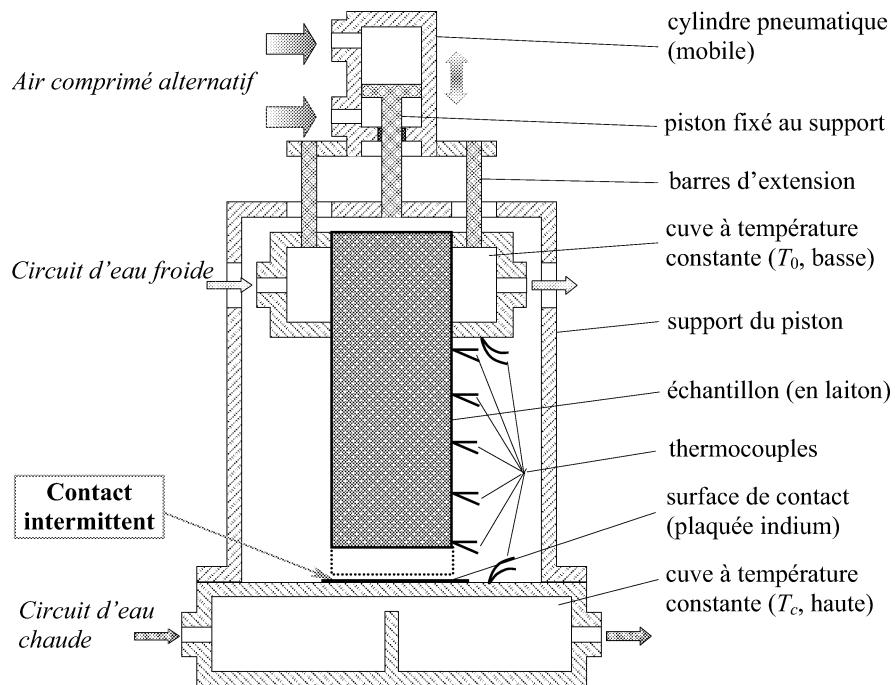


Fig. 6. Dispositif expérimental.

Fig. 6. Experimental apparatus.

barreau. Un thermocouple implanté sur la cuve « chaude » nous donne la deuxième référence de température (T_c).

5.2. Résultats de l'expérience

La préparation des expériences a pour but de mettre en place un contact stable pour le temps total de l'expérimentation. L'expérience commence après que les deux surfaces soient mises en contact et non-contact un grand nombre de fois, isothermiquement, pour assurer des propriétés mécaniques stables des surfaces de contact, ce qui est vérifié par l'identité des champs thermiques en contact permanent au début et à la fin de l'expérience.

L'expérience est menée en allant des petites périodes vers les grandes périodes. La distribution de température dans le barreau est relevée après un temps suffisamment long pour que le régime périodique établi soit atteint.

A titre d'exemple, nous donnons sur le Tableau 3, les relevés de températures d'une expérience pour $\tau = 20$ s (soit $\tau^* = 0,236$). On constate que la température T_0 est parfaitement stable (0,1 K de variation), par contre il est plus difficile de maintenir T_c constant. On constate dans ce cas une variation de 0,8 K pour un écart de la température au niveau du contact de 20 K à 30 K.

On choisit les durées de contact et de non-contact égales dans toutes les expérimentations. Nous donnons tous les résultats expérimentaux sous forme adimensionnelle et nous les comparons avec les résultats analytiques obtenus par le modèle quadripolaire en supposant les conductances uniformes par morceaux (contact et non-contact).

Tableau 3
Exemple de données expérimentales

Table 3
Example of experimental data

Temps, s	T_0	P_1	P_2	P_3	P_4	T_c
0	24,8	29,8	33,8	38,5	44,1	64,3
1	24,8	29,8	34,0	38,7	42,1	64,3
2	24,8	29,9	34,1	38,6	40,8	64,4
3	24,9	30,0	34,2	38,3	39,9	64,5
4	24,9	30,1	34,1	37,8	39,1	64,6
5	24,8	30,2	34,1	37,4	38,5	64,7
6	24,8	30,2	33,9	36,9	37,9	64,8
7	24,8	30,2	33,7	36,5	37,4	64,9
8	24,9	30,2	33,5	36,2	36,9	65,0
9	24,8	30,0	33,3	35,8	36,5	65,1
10	24,8	29,9	33,1	35,4	36,1	65,1
11	24,8	29,9	32,8	35,1	39,5	65,1
12	24,9	29,8	32,7	35,3	40,9	65,0
13	24,9	29,7	32,6	35,8	41,7	64,9
14	24,9	29,6	32,6	36,3	42,3	64,7
15	24,9	29,5	32,8	36,8	42,8	64,6
16	24,9	29,5	33,0	37,2	43,1	64,5
17	24,8	29,5	33,2	37,6	43,5	64,4
18	24,9	29,6	33,4	37,9	43,7	64,4
19	24,8	29,7	33,6	38,2	43,9	64,3
20	24,8	29,8	33,8	38,5	44,1	64,3

$\tau = 20$ s, $\tau_1 = \tau_2$, température ambiante = 24,7 °C. Températures imposées par les bains thermostatés : 25 °C et 65 °C.

La détermination des valeurs de conductance h_1 et h_2 est faite expérimentalement. Pour cela on se place en régime permanent correspondant au deux cas de contact et de non-contact ; la Fig. 7 montre le résultat obtenu (la valeur

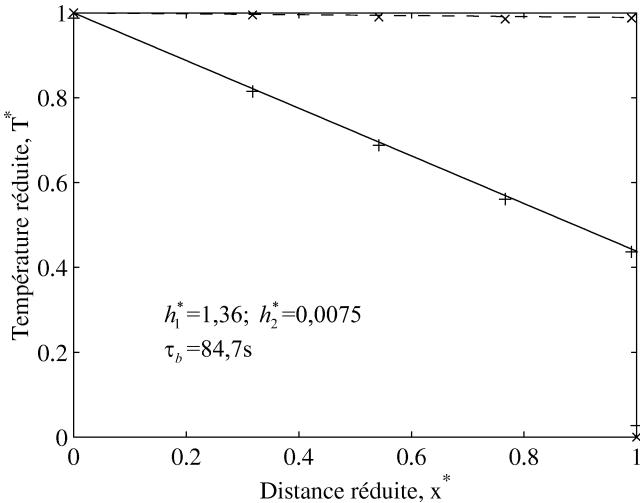


Fig. 7. Distributions de température pour les deux régimes permanents. Température en $x^* = 1$; — contact théorique ; + contact expérimental ; - - - non-contact théorique ; x non-contact expérimental.

Fig. 7. Temperature distributions for the two steady states.

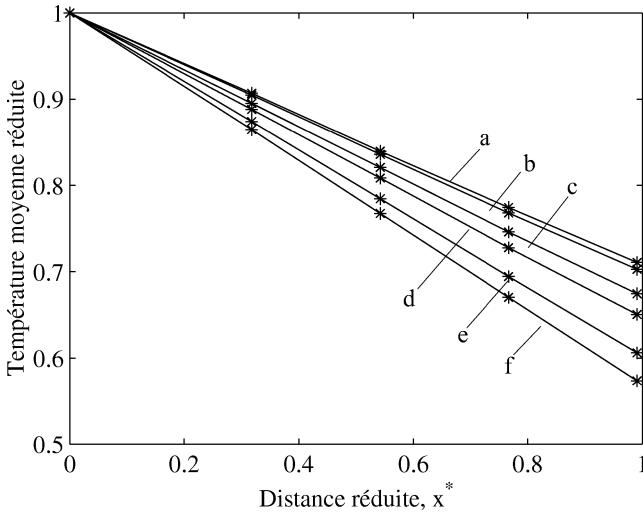


Fig. 8. Distributions de température moyenne dans une période. * points de mesure : (a) $\tau^* = 45,3$; (b) $\tau^* = 11,3$; (c) $\tau^* = 2,83$; (d) $\tau^* = 1,42$; (e) $\tau^* = 0,236$; (f) $\tau^* = 0,0283$.

Fig. 8. Mean temperature distributions during one period.

de h_2 correspondant à la position de non-contact a peu d'importance, on aurait pu prendre $h_2 = 0$).

Quand le régime périodique est atteint, le flux moyen sur une période au travers du barreau est constant pour chaque section droite, soit :

$$\frac{1}{\tau} \int q dt = -k \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\tau} \int T dt \right) = \text{constant} \quad (26)$$

comme le montre la Fig. 8, le champ des températures moyennes est une droite. Ce fait nous permet de calculer le

flux moyen dans le barreau en utilisant les moyennes des températures sur une période :

$$\bar{q} = -k \frac{\bar{T}_a - \bar{T}_b}{x_a - x_b} \quad (27)$$

où x_a et x_b sont les coordonnées des points de mesure sur le barreau.

5.3. Comparaison expérience-théorie

La Fig. 9 donne la résistance apparente du système en fonction de la période de contact en comparant l'expérience et la théorie. Nous observons une bonne concordance pour les grandes périodes. En revanche, un écart significatif est visible pour les petites périodes. Nous allons essayer de comprendre et d'expliquer ces résultats.

Influence de la surface de contact

Nous avons pris en compte les irrégularités microscopiques et macroscopiques du contact en introduisant un coefficient d'échange h_1 . En effet, pour des raisons mécaniques, il est particulièrement difficile d'obtenir un contact uniforme sur la section du barreau. En fait, nous avons pu observer une empreinte de l'impact après expérimentation, il apparaît nettement une zone qui n'est jamais en contact et par suite un transfert de chaleur bidimensionnel. La surface en contact est d'environ 70 % de la surface totale. Le problème est de savoir si l'établissement de la macro-constriction ne pourrait pas perturber le transfert.

Une évaluation du « temps d'établissement » à 90 % d'une constriction est donnée par $\tau_c \approx 10r_0^2/a$ où r_0 est le rayon de contact réel (ici $r_0^2/R^2 \approx 0,7$ soit $r_0 \approx 8,4$ mm) (voir [20]) ; ici on obtient $\tau_c^* = 0,24$, ce qui correspond effectivement aux périodes incriminées. Néanmoins, un

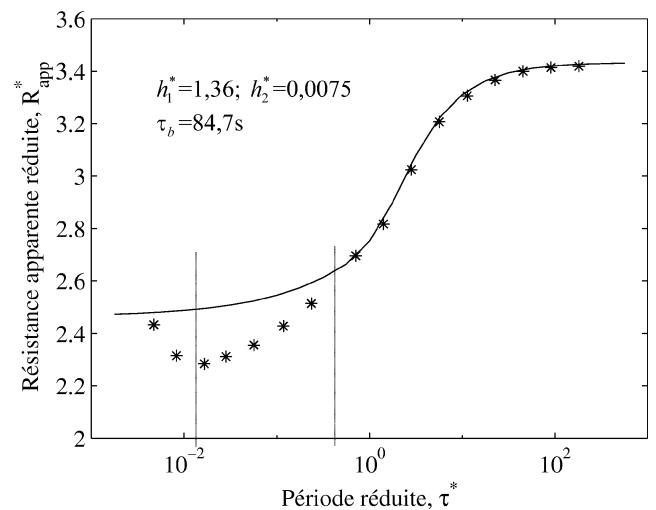


Fig. 9. Résistance apparente du système en fonction de la période. — résultats théoriques ($N = 250$) ; * résultats expérimentaux.

Fig. 9. Apparent system resistance versus the period.

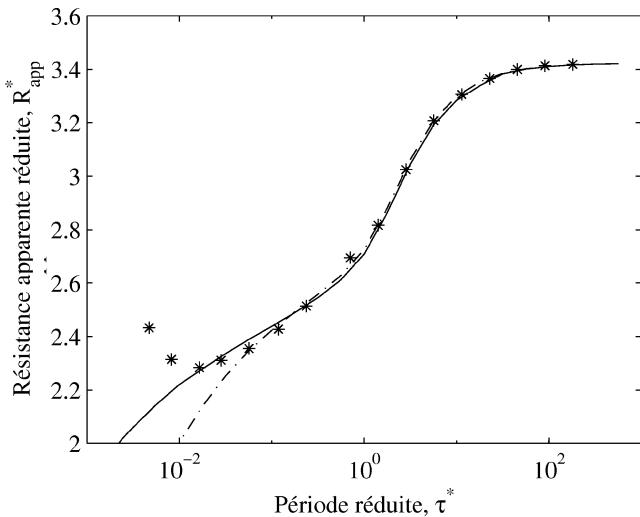


Fig. 10. Résultat utilisant une conductance dynamique. — résultats théoriques (correction 28); - - résultats théoriques (correction 29); * résultats expérimentaux.

Fig. 10. Result using a dynamic conductance.

calcul bidimensionnel (voir [21]) montre que l'effet est négligeable.

Influence des échanges thermiques sur la surface latérale

La prise en compte des échanges thermiques sur la surface latérale ne pose pas de problème si l'on se place dans l'hypothèse de l'ailette (ce qui est parfaitement vérifié dans notre cas). Nous avons utilisé ce modèle pour mettre en évidence l'influence des pertes latérales. Les résultats montrent que dans tous les cas l'influence est négligeable, toujours inférieure à 3%.

Influence du temps de déplacement du barreau

Le modèle utilise des durées de contact et de non-contact égales. En pratique le « temps de déplacement » du barreau modifie ces durées.

Une expérience, utilisant un circuit électrique (le barreau servant d'interrupteur) a permis de mesurer un temps de décalage d'environ 0,07 secondes ce qui n'est pas négligeable pour les périodes inférieures à la seconde, c'est ce qui explique la remontée des valeurs de résistance apparente pour les périodes réduites inférieures à 10^{-2} (rapports cycliques de contact inférieurs à 0,5).

Influence de la mise en contact

Le modèle utilise une valeur de conductance h_1 constante durant la demi-période. Il est évident que pour les petites périodes cette approximation n'est sûrement pas bonne; mise en contact non instantanée, rebond, relaxation ... mais aussi plus fondamentalement la notion de résistance de contact doit être modifiée pour les régimes transitoires

rapides. Il faut alors parler « d'impédance » de contact (voir [22, §6.1]).

Pour tenter d'expliquer la Fig. 9, nous allons utiliser une conductance h_1 variant avec le temps sur la durée du contact. Nous utilisons deux approches :

- la première consiste à utiliser la forme :

$$h_1^*(t^*) = C_1 + C_2/\sqrt{t^*} \quad (28)$$

(cette forme correspond à une impédance en $1/\sqrt{p}$ qui caractérise l'établissement d'une constriction des lignes de flux lors d'un contact en régime transitoire [22], on retrouve rigoureusement cette impédance pour les temps courts ou $p \rightarrow \infty$). Par identification, on obtient $C_2 = 0,011$ (C_1 correspond à la valeur permanente).

- la seconde, à chercher par identification de C_2 et n la meilleure fonction sous la forme :

$$h_1^*(t^*) = C_1 + C_2 t^{*n} \quad (29)$$

On obtient $n = -0,75$ et $C_2 = 0,0037$ (C_1 correspond à la valeur permanente).

En pratique, les résultats obtenus par les deux approches sont proches l'un de l'autre (Fig. 10). Le résultat obtenu paraît satisfaisant et semble expliquer les mesures.

6. Conclusion

A l'aide du développement de Fourier des variables périodiques en temps, nous avons développé un modèle quadripolaire pour résoudre le problème de contact thermique en régime périodique établi. Ce modèle nous permet de traiter le problème du contact thermique périodique pour des conditions d'interface variant de façon quelconque en temps. On a trouvé un bon accord entre les résultats de ce modèle et ceux de la littérature pour le cas particulier du contact intermittent qui pour ce type de méthode est le cas le plus difficile à traiter.

Il faut indiquer néanmoins, que dans le cas h discontinu, la solution par la méthode quadripolaire fait apparaître une oscillation harmonique et un phénomène de Gibbs au point de discontinuité de la conductance de contact h , à cause de l'insuffisance de la série de Fourier à décrire parfaitement des fonctions discontinues. En revanche, ce modèle présente une convergence très rapide lorsque la conductance varie continûment en temps.

Sur la base du modèle théorique, nous avons également développé une expérimentation de contact intermittent où les durées de contact et de non-contact sont approximativement égales. Pour des périodes réduites $\tau^* \geq 1$, les résultats expérimentaux et théoriques sont en parfait accord; par contre, pour des périodes réduites $\tau^* \leq 1$, des écarts non négligeables apparaissent qui mettent en relief les imperfec-

tions de l'expérience (ou la non prise en compte de phénomènes dans la modélisation) :

- surface de contact macroscopique variant avec le temps de contact et la période ;
- rapport cyclique variable avec la période ;
- conductance h_1 variant avec le temps.

Il est très difficile de conclure sur les importances relatives de ces imperfections mais il semble que la dernière soit prépondérante.

Annexe A. Série de Fourier des fonctions périodiques

Pour une fonction périodique $F(t)$ absolument intégrable sur une période τ , sa série de Fourier complexe est définie par :

$$F(t) \sim \sum F_n e^{i\omega_n t}, \quad \text{avec } \omega_n = \frac{2n\pi}{\tau} \quad (\text{A.1})$$

où $F_n = \bar{F}_n = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau F(t) e^{-i\omega_n t} dt$ en remarquant que $F(t)$ est réelle.

(A) Pour $F(t) = u + v \cos(\omega t)$

$$\begin{cases} F_0 = u \\ F_1 = v/2 \\ F_n = 0, \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

(B) Pour $F(t) = \begin{cases} h_1, & \text{pour } 0 < t < \zeta\tau \\ h_2, & \text{pour } \zeta\tau < t < \tau \end{cases}$

$$\begin{cases} F_0 = \zeta h_1 + (1 - \zeta)h_2 \\ F_n = \frac{1 - e^{-2n\pi\zeta i}}{2n\pi i} (h_1 - h_2), \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Annexe B. Caractéristiques du barreau

Dimension : longueur $l = 53,5$ mm et rayon $R = 10$ mm

Matériaux : laiton ($k = 110,9 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$; $a = 3,38 \times 10^{-5} \text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$)

Température ambiante : $24,7^\circ\text{C}$

Températures imposées : $T_0 = 25^\circ\text{C}$, $T_c = 65^\circ\text{C}$

Abridged English Version

Periodic thermal contact : a quadrupole model and an experiment

Heat transfer across solid surfaces in permanent contact has been extensively studied. However, few studies are performed on heat transfer across periodically in time contacting surfaces despite the importance of this problem in numerous industrial applications. The only reports in the literature, both theoretical and experimental on this

topic, are based on the hypothesis of constant contact conductances in both contact and contactless phases. In the present study, a quadrupole model is developed to solve the conductive transfer in a one-dimensional solid contact with any periodically time-varying contact conductance.

We consider a rod of uniform section. One end undergoes a contact with a surface of constant temperature by a periodically varying contact conductance while the other end is held at a fixed temperature. We assume that: the rod is insulated laterally so that the heat transfer in the rod is one-dimensional; the periodic contact has been performed for a sufficiently long time for a steady periodic thermal distribution to be established in the rod.

A thermal quadrupole relative to the conductive transfer in the rod is obtained through Fourier series development of periodically time-dependent variables. Combining quadrupole method and periodic boundary condition the problem, is reduced to a matrix expression, which can be readily solved numerically.

This quadrupole method can be used for predicting the thermal behavior of the contacting surfaces for any periodic condition. Two types of condition at the interface are examined: the first is a contact conductance varying sinusoidally and the second is much more difficult for applying this type of method, i.e. a case of intermittent contact (contact–non-contact). The model presents a very fast convergence when the conductance varies continuously in time. In the case of intermittent contact, a good agreement is found between the results of the present model and that in the literature. However, the solution of the quadrupole model shows an harmonic oscillation and a Gibbs' phenomenon at the discontinuities of the conductance due to an imperfection of Fourier series in describing discontinuous functions.

An experiment of intermittent contact (contact–non-contact) is also performed on the basis of the theoretical model. The durations of contact and non-contact are approximately equal. The experimental results are compared with the theoretical solutions. A good agreement is obtained when the dimensionless period is greater than 1. For period smaller than 1, the experiment does not correspond perfectly to the assumptions of the model. The theoretical model is modified by introducing a dynamic conductance for the contact phase. The results are satisfactory and seem to explain well the observed difference between experimental and theoretical results.

Références

- [1] C.V. Madhusudana, L.S. Fletcher, Contact heat transfer—The last decade, *AIAA J.* 24 (1985) 510–523.
- [2] L.S. Fletcher, Recent developments in contact conductance heat transfer, *J. Heat Transfer Trans. ASME* 110 (1988) 1059–1070.
- [3] J.P. Bardon, Heat transfer at solid-solid interface: basic phenomena—recent works, *Eurotherm* 4 Nancy (1988) 40–74.
- [4] C.V. Madhusudana, *Thermal Contact Conductance*, Springer, New York, 1996.

- [5] J.R. Howard, A.E. Sutton, An analogue study of heat transfer through periodically contacting surfaces, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 13 (1970) 173–183.
- [6] J.R. Howard, A.E. Sutton, The effect of thermal contact resistance on heat transfer between periodically contacting surfaces, *J. Heat Transfer Trans. ASME* 95 (1973) 411–412.
- [7] J.R. Reed, G. Mullineux, Quasi-steady state solution of periodically varying phenomena, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 16 (1973) 2007–2012.
- [8] M.D. Mikhailov, Quasi-steady state temperature distribution in finite regions periodically-varying boundary conditions, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 17 (1974) 1475–1478.
- [9] B. Vick, M.N. Özisik, Quasi-steady-state temperature distribution in periodically contacting finite regions, *J. Heat Transfer Trans. ASME* 103 (1981) 739–744.
- [10] A. Degiovanni, J.C. Batsale, Contact périodique en régime établi—Résistances thermiques apparentes limites pour des durées de contact nulles et infinies, *Internat. Comm. Heat Mass Transfer* 23 (1996) 579–587.
- [11] J.R. Howard, An experimental study of heat transfer through periodically contacting surfaces, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 19 (1976) 367–372.
- [12] W.M. Moses, R.R. Johnson, Experimental results for the quasi-steady heat transfer through periodically contacting surfaces, *AIAA Paper 87-1608*, Honolulu, Hawaii, 1987.
- [13] W.M. Moses, R.R. Johnson, Experimental study of the transient heat transfer across periodically contacting surfaces, *J. Thermophys. Heat Transfer* 2 (1988) 37–42.
- [14] N.C. Dodd, W.M. Moses, Heat transfer across aluminum/stainless steel surfaces in periodic contact, *AIAA Paper 88-2646*, Washington, DC, 1988.
- [15] D. Couedel, F. Danes, J.P. Bardon, Experimental study and analysis of heat transfer in a valve-seat periodic contact in an internal combustion engine, *HTD, Vol. 182, Advances in Heat Exchanger Design, Radiation and Combustion*, 59–66.
- [16] Y. Doin, A. Degiovanni, Contact thermique en régime variable et «milieu équivalent», *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II* 297 (1983) 397–400.
- [17] A. Degiovanni, Conduction dans un mur multicouche avec sources : extension de la notion de quadripôle, *Internat. J. Heat Mass Transfer* 31 (1988) 553–557.
- [18] A. Degiovanni, A.-S. Lamine, C. Moyne, Thermal contacts in transient states: a new model and two experiments, *J. Thermophys. Heat Transfer* 6 (1992) 356–363.
- [19] Matlab user's guide, The Maths, Inc.-21-Eliot Street-South Natick, MA 01760-USA.
- [20] H. Wang, C. Moyne, Contact thermique périodique avec constriction, in: *Actes congrès SFT 97 : Thermique aéronautique et spatiale*, Elsevier, Toulouse, 1997, pp. 731–736.
- [21] H. Wang, Contribution à l'étude thermique des contacts périodiques solide-solide, Ph.D. Thesis, Institut National Polytechnique de Lorraine, France, 2000.
- [22] D. Maillet, S. Andre, J.-C. Batsale, A. Degiovanni, C. Moyne, *Thermal Quadrupoles*, Wiley, Chichester, 2000.